

5/28
5/1A

رسالة
في
مساحة المحسم المكافى
للشيخ ابى سهل ويمن بن رستم القوهى
الموجود فى سنة ثلاثمائة وثمانين من الهجرة

5/2/81
5/12/81

الطبعة الاولى
مطبعة جمعية دائرة المعارف العثمانية
حيدرآباد الدكن
صانها الله تعالى عن جميع البلايا والفتن

تعداد الطبع ١٣٥٧

سنة ١٣٦٧
١٩٤٧ م

مساحة الجسم المكافئ

بسم الله الرحمن الرحيم

لما كان العلم بمساحة الاجسام والاشكال والمقادير بنسبة بعضها الى بعض قبل العلم بمعرفة مراكز اثنائها لانه المقدمه لها اذ لا يجوز وجود مراكز الاثقال الابدال العلم بمساحتها ، فلهذا لما استقصينا النظر في علم المساحة وفرغنا منه كما الذي في كتاب ارشميدس في الكرة والاسطوانة وغير ذلك من الكتب .

فبدأنا بتأليف كتاب مراكز الاثقال واستقصينا النظر فيه غاية الاستقصاء حتى وجدنا مراكز اثقال عدته اشكال لم يجدها احد من القدماء المبرزين في هذا العلم فضلا من دونهم من المتأخرين ولا سمعنا بذلك وجودها .

وهو ايضا مثل وجود مركز ثقل قطعة من كرة او مجسم قطع ناقص او قطع زائد الذي لم يكن موجودا الى وقتنا هذا فلما وجدنا ذلك ظننا في ان نجد مراكز اثقال اشكال اخر لم توجد اثنائها فيما قبل كمرکز ثقل الجسم المكافئ ولم يكن بد في وجود مركز ثقله من معرفة مساحته اولا كما قلنا آنفا .

ولم يكن كتاب موجود في مساحة المجسم المكافئ إلا ما ألفه أبو الحسن ثابت بن قرة وهو موجود مع أكثر أصحابنا لكنه كبير الحجم كثير الأشكال عدديا وخطوطيا وغيرهما تبلغ أشكاله إلى قريب من أربعين شكلا وكلها مقدمات لشكل واحد هو معرفة مساحة المجسم المكافئ •

ولما نظرنا فيه كان كتاب ارشيدس في الكرة والاسطوانة مع صعوبته ومع أن فيه (١) كثيرة من المساحة أسهل من قراءة ذلك الكتاب وهو عرض واحد أعني مساحة المجسم المكافئ •

فلماذا ما وقفنا على شيء منه بعد رغبتنا فيه وظننا أن حال كل راغب في قرائته كحالنا فيه من الوقت الذي ألفه ثابت إلى وقتنا هذا أعني أنه لم يقف عليه أحد كما لم تقف نحن عليه فلاجل ذلك حددنا النظر في استخراج مساحة هذا الشكل ابتداءا ووجدنا مساحته بطريق مستغنية عن تلك المقدمات كلها وغير محتاجة إلى شيء منها •

وكل من نظر في هذا وكان من أصحابنا علم أن الأمر كما قلنا ولولا أن تأليف كتاب مراكز الاثقال اضطرنا إلى معرفة مساحة هذا الشكل الذي استخرجه ثابت بطريقه أو لو كنا وقفنا عليه من كتابه واشتغلنا باستخراجه شيء قد استخرجه غيرنا بأي وجه كان ولا تكلمنا في طريق استخراج • من تقدمنا طويلا كان أو قصيرا سهلا كان أو صعبا • مستغنيا عن المقدمات أو محتاجا إليها لأن ذلك

(١) ما عزم في الأصل ولله معرفة

ليس من عادتنا لاسيما ومسالك هذه العلوم كثيرة واسعة •

فنبتدى الآن ونقول اذا دار قطع مكافى مع السطح المتوازى الاضلاع الذى يحيط به قطر ذلك القطع ونصف قاعدته ومع الخطوط الترتيب لذلك القطر ومع خطوط ذلك القطر حتى تعينه الادارة الى حيث بدأت منه فان المجسم الذى يحدث من ادارة سطح ذلك القطع هو المجسم المكافى والمجسم الذى يحدث به قطر القطع ونصف قاعدته هو الاسطوانة للمجسم المكافى وفى ذلك القطر هو ايضا قطر المجسم المكافى والسطوح التى تحدث من ادارة خطوط الترتيب نسميها سطوح الترتيب للمجسم المكافى والمجسمات التى تحدث فيما بين سطوح الترتيب نسميها مدورات المجسم المكافى وما كان منها حادثا من السطح المتوازى الاضلاع الذى يقع بعضه خارجا من القطع ويكون زاوية من زواياه على محيطه نسميه المدور الذى على المجسم المكافى •

ونسمى المدورين اللذين احدهما واقع فى المجسم المكافى والآخر واقع عليه نظيرين اذا كان الذى وقع فيه منفصلا من الذى وقع عليه اعنى بذلك ان يشترك فى ارتفاع واحد وكل مجسم يحدث من ادارة احد السطوح التى على ذلك القطع حول ذلك القطر اى سطح كان نسميه مجسم ذلك السطح او المجسم الكائن من ذلك السطح شيئا كان بالطوى او بالاسطوانة او بغيرهما •

كل اسطوانة مجسم مكافئ فان نصفها اصغر من جميع المدورات
الحادثات على الجسم المكافئ كم كانت واعظم من جميع المدورات
الحادثات فيه كم كانت .

مثال ذلك ان اسطوانة الجسم المكافئ - ا ب ج د - والجسم
المكافئ - ا ش د - والمدورات التي عليه - ا س ع د ه - ف ص ط
ك ل م ز - والمدورات التي فيه - ف ه ط ز - ف ك ن ت - فاقول
ان نصف اسطوانة - ا ب ج د - اصغر من جميع مدورات - ا س ع د
ه ف ص ط - ك ل م ن - التي على الجسم المكافئ ومن جميع امثالها
كم كانت واعظم من جميع مدورات - ف ه ط ز - ف ك ن ت -
التي فيه ومن جميع امثالها كم كانت .

برهان ذلك ان كل واحد من خطي - ا و ه د - من
خطوط الترتيب لقطر - س د و - فنسبة خط - و ش - الى - ش د
كنسبة مربع خط - ا و - الى مربع خط - ه د - وذلك لأن قطع
ا ش د - قطع مكافئ ونسبة مربع - ا د - الى مربع خط - ه د - هي
كنسبة مربع خط - ا د - الى مربع خط - ه ط - ولكن نسبة
مربع خط - ا د - الى مربع خط - ه ط - كنسبة الدائرة التي
قطرها خط - ا د - الى الدائرة التي قطرها خط - ه ط - فنسبة
الدائرة التي قطرها - ا د - الى الدائرة التي قطرها - ه ط - كنسبة
خط و - ش - الى خط - ش د - فضرب خط - و ش - في

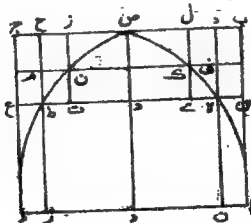
الدائرة

مساحة الجسم المكافئ

٧

الدائرة التي قطرها - ه ط - مساو لضرب خط - ش د - في الدائرة التي قطرها - ا د - ولكن بضرب خط - و ش - في الدائرة التي قطرها - ه ط - مساو لاسطوانة - ف ز ح ز - التي حدثت من ادارة سطح - ز ف و س - المتوازي الاضلاع حول قطر - س - وكان خط الترتيب على القدر على الزاوية القائمة او على زاوية غير قائمة فكأنه قدر احد من احد رأسى الاسطوانة مخروط ما وندبر بعضه على الرأس الآخر وكذلك ضرب خط - ش د - في الدائرة التي قطرها - ا د - مساو لاسطوانة - س ح غ - التي حدثت من ادارة سطح - س ش د - المتوازي الاضلاع فاسطوانة - ف د ح ز مساوية لاسطوانة - س ح م ع - فاذا القينا اسطوانة - ه ز ح ط المشتركة في الجسم الذي يحدث من ادارة احد سطحى - س ب ز ه ط ح م ع - اصغر من سدور - اس ع د - فاذا ركبنا كان مجموع هذا الجسم وهذا المدور اصغر من ضعف مدور - اس ع د -

ش - ا



مساحة الجسم المكافئ

ولكن الجسم والمدور جميعها فضل اسطوانة - ا ب ج د
على اسطوانة - ه ز ح ط - ففضل اسطوانة - ا ب ج د - على
اسطوانة - ه ز ح ط - اصغر من ضعف مدور - ا س ع د - الذى
الجسم المكافئ .

وكذلك فضل اسطوانة - ه ز ح ط - على اسطوانة - ل م ن
م ن - اصغر من ضعف مدور - ف ص ط - التى عليه وكذلك
جميع الاساطين والمدورات الحادثة عليه حتى تنتهى الى البقية تبقى
من اجزاء اسطوانة - ا ب ج د - المفروضة .

ولكن تلك البقية مجسم - ل م ن - المكافئ سوى مجسم
ل م ن - وان جعلنا مجسم - ل م ن - مشتركا تكون اسطوانة
ا ب ج د - اصغر من ضعف جميع المدورات التى على الجسم المكافئ
كم كانت فالنصف منها اصغر من جميع المدورات التى عليه كم كانت .
وايضاً لأن الجسم الذى يدور على سطح - ا ب ز و - ز ج
ح د - اعظم من الجسم الذى يدور على سطحى - س ل س - ط ج ح
وهذا الجسم مساوٍ لمدور - ف ه ط ز - كما يتبين قبل فيكون الجسم
الذى يدور على سطحى - ا ب ز و - ز ج ح د - اعظم من مدور
ف ه ط ز - واذا ركبنا كائناً جديهما اعظم من ضعف يدور - ف ه ط ز
ولكن الجميع هو فضل اسطوانة - ل م ن - على اسطوانة - ه ز ح
ط - ففضل اسطوانة - ا ب ج د - على اسطوانة - ه ز ح ط - اعظم

مساحة المجسم المكافى

٩

من ضعف مدور ف ه ط ز - وكذلك فضل اسطوانة ه ز ح ط
على مجسم ك ل م ن - اعظم من ضعف مدور ب ك ن ت - كما يتنا •
وكذلك سائر الاساطين والمدورات التى فى المجسم المكافى

حتى ينتهى الى آخر ما يبنى من الاسطوانة المفروضة •

وليكن ذلك مجسم - ك ل م ن - ففضل اسطوانة - ا ب ج

د - على مجسم - ك ل م ن - اعظم من ضعف المدورات التى فى المجسم
المكافى كلهما كم كانت •

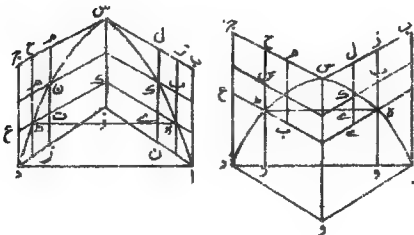
وان زدنا مجسم - ك ل م ن - على فضل اسطوانة - ا ب ج د -

عليه يكون جميع اسطوانة - ا ب ج د - اعظم كثيرا من ضعف
المدورات التى فى المجسم المكافى كلهما كم كانت فالنصف من اسطوانة

ا ب ج د - اعظم من جميع المدورات التى فى المجسم المكافى كم كانت
واصغر من جميع المدورات التى عليه كم كانت، وذلك ما اردنا

ش - ٢

ان نين •



مساواة الجسم المكافئ

إذا قسم أحد المدورات التي فيما بين سطحين من سطوح الترتيب في مجسم مكافئ بنصفين بسطح آخر من سطوح الترتيب حتى يحدث من قسمه مدورات على الجسم المكافئ ومدوران نظيران لهما فيه فإن فضلا المدورين الحادين على نظيرهما الحادين فيه نصف فضل المدور الأول الذي كان عليه نظيره الذي كان فيه قبل القسمة .

مثال ذلك أن مدورا من المدورات التي على مجسم - ا ب ج د - المكافئ حدوده عن إدارة سطح - ا د ه ج - ونظيره من المدورات التي فيه حدوده عن إدارة سطح - ا د ز ح - ونظيره من خط - ط ك ل م - قاسما لخطي - ا د - ه ج - وللخطوط التي تقع بينهما على موازاة لهما بنصفين نصفين وجعل غلط - ب ل س موازيا لقطر - ا ب .

فأقول أن فضل مدوري - ط د س ل - ا ط م ح - على مدوري - ط د ز ل - ا ط ل ن - النظيرين لهما أعني الجسمين اللذين يكونان من سطحي - ك ز س ل - ب ل م ج - نصف فضل مدورة ا د ه ج - على مدور - ا د ز ح - النظير له أعني الجسم الذي يكون من سطح - ح ز ه ج .

برهان ذلك أن سطح - ح ز س ن - متوازي الاضلاع وقد قسم - ز ح - بنصفين بخط - ك ل - الموازي لخطي - ز س - ح ن - يكون سطح - ح ك ل ن - مثل - ك ز س ل - فسطح ك ز - س ل - نصف سطح - ح ز س ن .

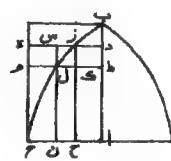
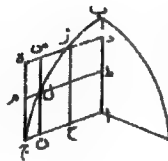
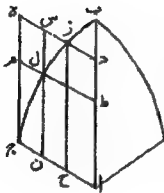
وبمثل



مساحة المجسم المكافئ

وبمثل ذلك تبين ان سطح - ب ل م ح - نصف سطح
 ب س - ه ج - قدورا سطح - ك ز س ل - ب ل م ج - جميعا
 اللذان هما مدورى - ط د س ل - ا ط م ح - على مدورى - ط د
 دى - ا ط ل ن - مساويان لنصف مدور سطح - ح ز ه ج - الذى
 هو فضل مدور - ا د ه ج - على مدور - ا د ز ح - وذلك
 ما اردنا .

كل مجسم مكافئ مساو لنصف اسطوانة، مثال ذلك ان المجسم
 المكافئ - ا ب ج - ونصف اسطوانة مثل مجسم - د - فاقول ان
 مجسم - ا ب ج - مساو لمجسم - د - .
 ش - ٣



مساحة المجسم المكافئ

برهان ذلك ان مجسم - ا ب ج - ان لم يكن مساويا لمجسم
 د - فلما اعظم او اصغر منه فليكن اولا اعظم من جسم د - ان امكن
 ذلك وليكن فضل مجسم - ا ب ج - على جسم - د - جسم - هـ -
 ونجعل على مجسم - ا ب ج - المكافئ مدورات كم كانت وقصل
 من كل واحد منها مدورا فيه ولتكن فضلات المدورات التي عليها
 على المدورات التي فيه هي المجسمات التي تكون من ادارة سطوح
 زح ط ج - ك ل م ح - ب ل س ل - وتقسم كل واحد من هذه
 المدورات بنصفين بسطوح الترتيب حتى ترجع فضلات المدورات
 الحاديات التي على الجسم المكافئ على نظائرها من المدورات الحاديات
 فيه الى نصف الفضلات التي كانت قبل القسمة كما يتنا في الشكل
 الثاني •

وكذلك تقسم ابدا المدورات الحاديات بنصفين نصفين حتى
 تنتهي فضلات المدورات التي عن الجسم المكافئ على نظائرها من
 المدورات التي فيه الى اصغر من جسمه فجسم - هـ - اعظم من تلك
 الفضلات كلها •

فلتكن الفضلات هي المجسمات التي تكون على سطوح
 ع ح - ح ف - ف ل - ل ص - ص ب - ب ج - هـ - اعظم من
 هذه المجسمات كلها فهو اذن اعظم كثيرا من المجسمات التي تكون
 على الثلاث التي في الجسم المكافئ لأنها بعض تلك الفضلات فان

جعلنا

جعلنا جسم - د - مشتركا يكون جسمى - هـ - د - اعظم من مجسمات
 الثلاث كلها مع جسم - د - وليكن جسمى - د - هـ - مساويين
 للجسم - ا ب ج - المكافى لما فرضنا فجسم - ا ب ج - المكافى
 اعظم من مجسم - د - مع المجسمات السكائات من الثلاث التى فى
 الجسم المكافى .

فاذا افينا المجسمات المشتركة السكائنة من الثلاث المشتركة
 تبقى المدورات التى فى مجسم - ا ب ج - المكافى كم كانت اعظم
 من جسم - د - وهذا لا يمكن لأننا قد بينا انها اصغر من جسم - د
 الذى هو مساو لنصف اسطوانة الجسم المكافى فليس الجسم المكافى
 باعظم من جسم - د .

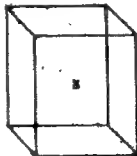
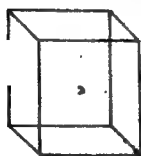
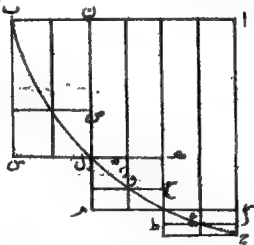
وان امكن ان يكون مجسم - ا ب ج - المكافى اصغر من
 جسم - د - فليكن الفضل بينهما جسم - هـ - حتى يكون مجسم
 ا ب ج - المكافى مساويا لجسم - د - وتقسم ايضا المدورات التى
 على مجسم - ا ب ج - بنصفين نصفين كما قلنا حتى تنتهى الفضلات
 الى اصغر من جسم - هـ - كما بينا فجسمات الثلاث التى على الجسم
 المكافى يكون اصغر كثيرا من جسم - هـ - لأنها بعض تلك
 الفضلات .

وان جعلنا مجسم - ا د - المكافى مشتركا تكون مجسمات
 الثلاث على الجسم المكافى مع الجسم المكافى اصغر من جسم

مساحة الجسم المكافئ

• مع مجسم - ال ج - المكافئ وليكن جسم - ه - مع الجسم المكافئ مساويان لجسم - د - كما فرضنا ونجسمات المثلثات التي على الجسم المكافئ مع الجسم المكافئ هي بالمدورات التي على الجسم المكافئ بالمدورات التي على الجسم المكافئ اصغر من جسم - ه - وهذا محال •

لأننا قد بينا انها اعظم من نصف اسطوانة مجسم - ال ج - المكافئ الذي هو مساو لجسم - د - فجسم - ال ج - المكافئ ليس باصغر من مجسم - د - وقد بينا انه ليس باعظم منه فيجسم ال ج - المكافئ مساو لجسم - د - الذي هو نصف اسطوانة الجسم المكافئ فكل مجسم مكافئ هو نصف الاسطوانة التي لذلك الجسم المكافئ وذلك ما اردنا • ش - ٤



وقد

وقد استعملنا في هذا الشكل انه اذا كان مقداران مختلفان
 وفضل من اعطيهما نصفه ومن الباقي نصفه وفعل ذلك دائماً فانه ينتهي
 الى مقدار ما اصغر من المقدار الاصغر فالمقدار الاعظم هاهنا هو مجموع
 فضلات المدورات التي على الجسم المكافئ على المدورات التي فيه
 وهي التي قسمت بنصفين نصفين والمقدار الاصغر هو جسم - هـ -

وقد بين اقليدس انه اذا فصل من الاعظم من نصفه ومما يبق
 اكثر من نصفه وفعل ذلك دائماً فانه ينتهي الى مقدار اصغر من
 الاصغر والبرهان على ذلك واحد .

واذا كان الامر على ما وصفنا فكان الاولى ان تقول اذا
 كان مقداران مختلفان وفصل من اعظمهما ما ليس باقل من نصفه
 ومما يبق ما ليس باقل من نصفه وفعل ذلك دائماً فانه ينتهي الى
 مقدار اصغر من المقدار الاصغر حتى يكون البرهان عاماً - والله للوفق
 تمت الرسالة والحمد لله وحده وصلواته على

نبه محمد وآله الطاهرين - فرغت

من تطبيقها بالموصل المحروسة

في صفر من شهور



۳۳۷۰۳	دانشنامه
ب ۷	فن
۶۲۹	تجربه

